

## CONSTRUYENDO CUADRADOS CON GEOGEBRA A PARTIR DE DIFERENTES SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN. UN ESTUDIO CON MAESTROS DE PRIMARIA EN FORMACIÓN

Alberto Arnal Bailera – Antonio M. Oller-Marcén

albarnal@unizar.es – oller@unizar.es

Universidad de Zaragoza – Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza (España)

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: GeoGebra, Formación de profesorado, Geometría, Elementos

### Resumen

*Estudiamos las soluciones aportadas por 18 parejas de alumnos de 3º del Grado de Magisterio de Educación Primaria cuando trasladan a GeoGebra el proceso de construcción de un cuadrado dado su lado tal y como aparece descrito (Proposición I.46) en dos ediciones diferentes de los elementos de Euclides: la clásica de la editorial Gredos y la menos conocida de Oliver Byrne. Estas ediciones emplean sistemas de representación radicalmente diferentes para presentar un mismo contenido matemático. Teniendo en cuenta la relativa sencillez de la construcción, sorprende el gran número de distintos procedimientos seguidos por los alumnos. En este trabajo, describimos y analizamos esta variedad de construcciones y tratamos de identificar y discutir los errores cometidos y las dificultades encontradas por los alumnos tanto en relación con los distintos sistemas de representación utilizados, como con el software de geometría dinámica.*

### Introducción y objetivos

Múltiples ejercicios de Geometría clásica consisten en las construcción de figuras a partir de algunos de sus elementos (construcción de un polígono regular dado uno de sus lados, construcción de un triángulo a partir de sus tres lados, etc.) o de objetos que cumplan ciertas propiedades (construcción de una recta perpendicular a otra por un punto, construcción de una recta tangente a una circunferencia por un punto exterior, etc.). Estas construcciones se han realizado tradicionalmente con regla y compás siguiendo unos procedimientos más o menos estandarizados. Textos clásicos, como los *Elementos*, incluyen un amplio catálogo de tales construcciones detallando paso a paso las operaciones a realizar con los citados instrumentos.

El uso de un software de Geometría dinámica (de GeoGebra en particular) para llevar a cabo este tipo de construcciones implica, por sus especificidades, una reinterpretación o adaptación de los pasos descritos en los textos clásicos que debe ir más allá de la mera traslación del procedimiento.

Esta adaptación, no obstante, no está exenta de dificultades por cuanto las instrucciones proporcionadas en los textos están concebidas para ser seguidas utilizando unas herramientas concretas (la regla y el compás) que no son las que se van a utilizar hoy en día. Es evidente, además, que esta labor de adaptación debe ser una tarea a llevar a cabo por los docentes a la hora de diseñar y preparar sus clases o de generar recursos o actividades para sus alumnos relacionados con estos contenidos.

Así pues, a partir de estas consideraciones nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿La utilización de un sistema de representación particular para dar instrucciones, mejora los resultados de los alumnos de Magisterio a la hora de realizar construcciones en GeoGebra? En particular, para tratar de responder a esta pregunta abordamos los siguientes objetivos específicos:

1. Determinar si el sistema de representación mediante el que se proporcionan las instrucciones a los alumnos tiene alguna influencia sobre el grado de seguimiento de las instrucciones y sobre la corrección de la construcción realizada en GeoGebra.
2. Identificar las herramientas GeoGebra utilizadas y analizar los errores cometidos por los alumnos al realizar las construcciones que se les solicitan.

### **Marco teórico**

La génesis instrumental es un proceso personal de cada individuo participante en la situación de enseñanza y aprendizaje, que involucra una cierta transformación de lo que Rabardel (1995) y Trouche (2004) llaman artefacto a lo que denominan instrumento. En este proceso, el artefacto, una realidad física exclusivamente, se transforma en algo más complejo que incluye, además de lo físico, una parte psicológica que aporta cada individuo y que le confiere una funcionalidad que le permite integrarlo en su actividad. Esto se produce gracias a la emergencia conjunta de esquemas mentales y técnicas de uso de la herramienta cuando se trabaja con tecnologías digitales (Drijvers, 2012).

En el proceso de génesis instrumental, Rabardel (1995) distingue dos subprocesos, uno orientado al individuo y otro al artefacto. En el primero, la instrumentación, el artefacto influye en el individuo, permitiendo desarrollar una cierta actividad matemática de un modo distinto a como posiblemente venía realizándola. En el segundo subproceso, la instrumentalización, el individuo influye en el artefacto, descubriendo sus funcionalidades y terminando en personalizar sus utilidades o utilizándolo para fines no previstos por el diseñador. Durante los procesos de génesis instrumental se dan ciertos fenómenos en el alumno que han sido descritos en Guin y Trouche

(2002) para otros contenidos de Matemáticas, pero que son fácilmente trasladables al entorno de nuestro estudio con contenidos de Geometría:

- Comportamiento del pescador. El alumno prueba opciones del instrumento tecnológico con la esperanza de que algo termine por ocurrir.
- Transporte automático. El alumno confía en poder resolver directamente el problema con el instrumento tecnológico de que se trate, dada su complejidad.
- Determinación inflexible. El alumno repite la misma técnica y aplicación realizando ajustes sucesivos, pero sin demasiada reflexión sobre la conveniencia de explorar otras técnicas o aplicaciones.

Iranzo y Fortuny (2009) detallan tareas que muestran la dificultad de transferencia de las estrategias de resolución con papel y lápiz a las estrategias con ayuda de GeoGebra y viceversa, estableciendo tipologías de alumnos según la mayor o menor presencia de prácticas de reflexión o procedimentales: autónomos (alto nivel de instrumentación e instrumentalización), instrumentales (nivel medio de instrumentación e instrumentalización), procedimentales (nivel bajo de instrumentalización) y naif, (nivel bajo de instrumentación). Estos últimos tienden a razonar sobre el dibujo y no sobre la figura y sus construcciones no pasan el test de arrastre (Mariotti y Bartolini, 1998).

### **Método y muestra**













La experimentación se llevó a cabo con 36 estudiantes del Grado en Magisterio de Educación Primaria durante el curso académico 2014-2015 y en el marco de la asignatura Didáctica de la Geometría que se desarrolla en el tercer curso. En concreto, la actividad se desarrolló en una sesión de dos horas de duración en el aula de informática. Durante la sesión se alternó el trabajo de los alumnos en 18 pequeños grupos formados por hasta tres personas, con las puestas en común coordinadas por los investigadores.

La tarea propuesta a los alumnos consistió en la construcción de un cuadrado a partir de un lado (Proposición 46 del Libro I de los Elementos). En concreto, los alumnos debían reproducir las instrucciones proporcionadas por escrito mediante el uso de GeoGebra.

Para responder a la pregunta de investigación planteada anteriormente, se crearon dos versiones de la tarea. En una de ellas (que llamaremos versión C), las instrucciones y figuras proporcionadas a los alumnos provenían de la edición clásica de los *Elementos* de Euclides (Euclides, 1994). En la otra (que llamaremos versión B), se proporcionan las instrucciones y figuras tal y como aparecen

en la edición de los *Elementos* realizada por el inglés Oliver Byrne (Byrne, 1847). De los 18 grupos, 10 completaron el modelo B del cuestionario, mientras los 8 restantes completaron el modelo C.

En la Figura 1 se muestran las dos versiones de la tarea. En ella se pueden apreciar los distintos sistemas de representación utilizados, así como las ligeras diferencias que existen entre ambos procesos de construcción.

<p>TAREA 1: Sigue las instrucciones para construir un cuadrado de lado dado en GeoGebra a partir de la siguiente proposición. Anota las herramientas de GeoGebra que vayas utilizando.</p> <p>PROPOSICIÓN I.46: Sobre un segmento dado , construir un cuadrado.</p> 	
INSTRUCCIONES	HERRAMIENTA GEOGEBRA
Dibujar   	
Dibujar   	
concurrente con dibujado   	
 es el cuadrado buscado.	

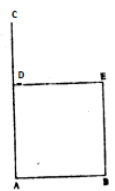
<p>TAREA 1: Sigue las instrucciones para construir un cuadrado de lado dado en GeoGebra a partir de la siguiente proposición. Anota las herramientas de GeoGebra que vayas utilizando.</p> <p>PROPOSICIÓN I.46: Trazar un cuadrado a partir de una recta dada.</p> 	
INSTRUCCIONES	HERRAMIENTA GEOGEBRA
<p>Sea AB el segmento dado. Así pues, hay que trazar un cuadrado a partir de AB.</p> <p>Trácese el segmento AC que forme ángulos rectos con el segmento AB desde su punto A, y hágase AD igual a AB; y por el punto D trácese la paralela a AB, y por el punto B trácese BE paralela a AD.</p> <p>Por tanto, ABED es el cuadrado buscado.</p>	

Figura 1. Enunciado de la Tarea 1 en ambas versiones del cuestionario

Como se puede observar, la edición de Oliver Byrne de los *Elementos* de Euclides utiliza un sistema de representación poco convencional. El sistema tradicional (letras mayúsculas para puntos, segmentos denotados a partir de sus extremos, etc.), que se puede apreciar en la edición clásica, es sustituido por un lenguaje de tipo fundamentalmente icónico en el que el color y la representación intuitiva de objetos y conceptos resulta de gran importancia. El uso del sistema de representación planteado por Byrne se ha utilizado recientemente de forma fructífera en trabajos con profesorado de Secundaria en formación (Arnal-Bailera y Oller-Marcén, 2017).

El estudio realizado es de carácter exploratorio con una finalidad esencialmente descriptiva (Elliot y Timulak, 2005). Se trata de una investigación de tipo mixto en la que se combina el enfoque cuantitativo con el análisis de datos de tipo cualitativo. En particular, y en relación con los objetivos enumerados anteriormente, las variables en las que se centrará principalmente nuestro análisis son las siguientes:

- Seguimiento de las instrucciones por parte de los alumnos. Queremos estudiar si los alumnos se ajustaban o no a las instrucciones proporcionadas en el enunciado de la tarea.

- Corrección de la construcción realizada en GeoGebra. Una construcción se ha considerado correcta cuando pasa el test de arrastre.
- Herramientas de GeoGebra utilizadas por los alumnos para llevar a cabo la construcción.
- Errores cometidos en el proceso de construcción.

La recogida de la información se ha llevado a cabo mediante diversos procedimientos. El primero consistió en la observación por parte de los investigadores. En segundo lugar, se dispone de las producciones de los alumnos tanto escritas en sus respuestas al cuestionario como digitales en los ficheros de GeoGebra generados. Finalmente, las fases de puesta en común fueron grabadas en video y transcritas para su posterior análisis.

## Resultados

En primer lugar, es interesante señalar que la mitad de los grupos participantes no siguen al pie de la letra las instrucciones proporcionadas en el formulario a la hora de reproducir la construcción en GeoGebra. Este hecho se produce además con independencia de la versión del cuestionario con que estuviesen trabajando. Por otro lado, el hecho de no respetar las instrucciones no parece tener influencia en la corrección de la construcción realizada (Tabla 1).

	Versión B		Versión C	
	Construcción correcta	Construcción incorrecta	Construcción correcta	Construcción incorrecta
<b>Respetan instrucciones</b>	3	2	1	3
<b>No respetan instrucciones</b>	4	1	1	3

Tabla 1. Corrección de las respuestas y respeto de las instrucciones según la versión de la tarea

Como hemos mencionado anteriormente, la principal pregunta de investigación que pretendemos responder es si la utilización de un sistema de representación particular para dar instrucciones puede mejorar resultados de los alumnos de Magisterio a la hora de construir polígonos en GeoGebra.

	Versión B	Versión C
<b>Construcción correcta</b>	7	2
<b>Construcción incorrecta</b>	3	6

Tabla 2. Corrección de las instrucciones según versión de la tarea

En la Tabla 2 se puede observar que los alumnos que completaron el modelo B del cuestionario encontraron aparentemente menos dificultades a la hora de realizar la construcción correctamente con GeoGebra. De hecho, si realizamos un test  $\chi^2$  de independencia (con la corrección de Yates) entre ambas variables, obtenemos que existe dependencia entre ellas con un nivel de confianza de aproximadamente el 90%.

Entre los que lo construyen correctamente y siguen las instrucciones, tres grupos siguen el procedimiento que se realizaría con regla y compás: Primero utilizan la herramienta ‘Recta perpendicular’, a continuación trasladan la longitud del segmento dado con la herramienta ‘Circunferencia’ y finalmente cierran la construcción del cuadrado utilizando en dos ocasiones la herramienta ‘Recta paralela’. El cuarto grupo se aparta de esta construcción canónica realizando los dos primeros pasos en uno utilizando la herramienta ‘Rota alrededor de un punto’.

De entre los grupos que lo construyen de forma incorrecta aunque sigan las instrucciones, el error principal consiste en realizar ajustes a mano de objetos que se construyen sin haber impuesto todas las condiciones que los definen. Por ejemplo, para construir una perpendicular al segmento dado por uno de sus extremos, algunos grupos construyen primero un punto arbitrario exterior al segmento, para a continuación trazar una perpendicular por ese punto y arrastrarla hasta que pasa por el extremo del segmento (ver Figura 2).

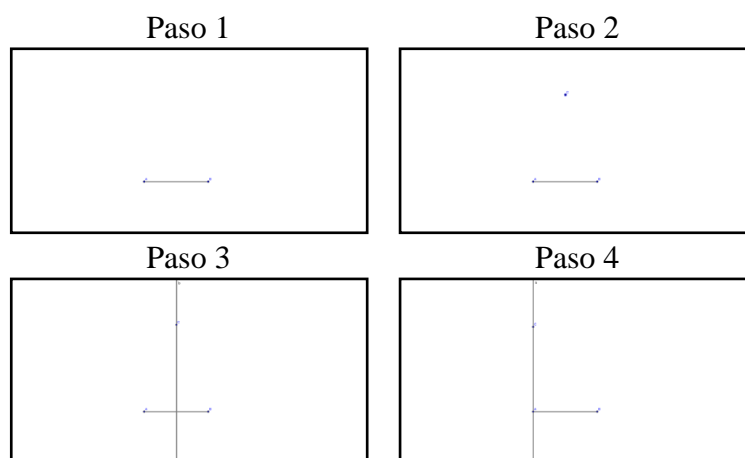


Figura 2. Construcción “incorrecta” de la perpendicular a una recta por un punto.

El mismo error (arrastrar una recta para conseguir que pase por el punto deseado) aparece en otros grupos utilizando la herramienta recta paralela. Por otro lado, también encontramos un error análogo arrastrando puntos en lugar de rectas, ya sea para conseguir que un segmento tenga la longitud deseada o para que un ángulo sea recto.

## Conclusiones y discusión

Se observa que el sistema de representación utilizado para proponer la tarea, no parece tener influencia sobre la adhesión de los alumnos a las instrucciones propuestas.

Los alumnos de Magisterio que trataron de construir el cuadrado a partir de la edición de Byrne tuvieron una tasa de éxito mucho mayor que los que lo intentaron a partir de la de Gredos. La presentación de la construcción del cuadrado por parte de Byrne favorece la utilización de GeoGebra sobre todo por la reducción de simbolismo en la transmisión de información y por el carácter más concreto y visual de las construcciones mostradas y del modo en que se representan los objetos. Por ejemplo, cuando Byrne se refiere a un segmento, lo muestra gráficamente (color incluido) frente a la práctica usual de hacerlo mediante la referencia a dos puntos (sus extremos) que en ocasiones no están definidos previamente con lo que se introduce simultáneamente el segmento y los dos puntos. De hecho, en su introducción, el propio Byrne (1847, p. viii) afirma que “las formalidades y parafernalia del rigor se presentan tan ostentosamente que casi ocultan la realidad” como justificación de su manera de presentar su revisión de los *Elementos*.

La presentación clásica de la construcción del cuadrado no favorece la utilización de GeoGebra para esta tarea. El principal obstáculo detectado tiene que ver con el papel del punto C. Este punto no se construye explícitamente y su único papel es el de nombrar una semirrecta. Además, se introduce en la construcción a la vez que la propia semirrecta; con las dificultades de comprensión que ello conlleva. De hecho, muchos de los errores detectados tienen su origen en los intentos de los alumnos de construir previa e independientemente este punto C, lo que provoca que la construcción necesite ser ajustada *a mano* y, por tanto, no pase el test de arrastre.

Entre los alumnos que han seguido las instrucciones podemos identificar tres de los perfiles señalados por Iranzo y Fortuny (2009). Los cinco grupos que realizan la construcción de forma incorrecta se podrían poner en relación con el perfil naif, dado que sus construcciones no pasan el test de arrastre y parecen razonar sobre el dibujo más que sobre la figura. Los tres grupos que siguen el procedimiento que se realizaría con regla y compás se podrían poner en relación con el perfil instrumental, ya que utilizan GeoGebra como soporte conceptual y visual. Finalmente, el grupo restante podría clasificarse como autónomo ya que, en cierto modo, optimiza el proceso de construcción utilizando una herramienta (rotar alrededor de un punto) que unifica los primeros pasos, lo que podría ser un rasgo de alto nivel de instrumentalización.

## Agradecimientos

Trabajo financiado parcialmente por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo (Grupo S119-Investigación en Educación Matemática) y por el Ministerio de Economía y Competitividad de España (Proyecto EDU2015-65378-P).

### **Referencias bibliográficas**

Arnal-Bailera, A. y Oller-Marcén, A.M. (2017). Formación del profesorado y demostración matemática. Estudio exploratorio e implicaciones. *Boletim de Educaçao Matemática*, 31(57). En prensa.

Artigue, M. (1997). Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage, *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), pp. 133-169.

Arzarello, F. y otros (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 34(5), 66-72.

Byrne, O. (1847). *The first six books of the elements of Euclid in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*. London, UK: William Pickering.

Drijvers, P. (2012). Teachers transforming resources into orchestrations. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources: mathematics curriculum materials and teacher development*, pp. 265-281. Nueva York: Springer.

Elliot, R. y Timulak, L. (2005). Descriptive and interpretive approaches to qualitative research. En Miles, J. y Gilbert, P. (Eds.) *A handbook of research methods for clinical and health psychology*, pp. 147-159. New York: Oxford University Press.

Euclides (1994). *Elementos. Libros I-IV*. Madrid, España: Gredos.

Guin, D. y Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of intrumental orchestrations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(5), 204-211.

Iranzo, N. y Fortuny, J.M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), 433-446.

Mariotti, M.A. y Bartolini, M.G. (1998). From drawing to construction: teacher's mediation within the Cabri environment. En K. Newstead y A. Olivier (Eds.). *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 180-195. Stellenbosch: PME.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. París, Francia: Armand Colin.



Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307.